

Βάσεις Gröbner

22 Ιουνίου 2017

1. (1,5 μονάδες) Χρησιμοποιώντας τεχνικές των βάσεων Gröbner υπολογίστε την τομή των ιδεωδών $I_1 = \langle x, y - 1 \rangle$ και $I_2 = \langle x, y^2 \rangle$ του δακτυλίου $\mathbb{Q}[x, y]$.

2. (1,5 μονάδες) Να υπολογίσετε μια βάση και την διάσταση του K -διανυσματικού χώρου $K[x, y, z]/I$, όπου I είναι το ιδεώδες

$$\langle \underline{x^3} + y^3 + xz^2 - 7z^5, \underline{y^4} - z^2y + 7z, \underline{z^2} - z + 2 \rangle. \quad x > y > z$$

3. (1,5 μονάδες) Τι είναι μονωνυμική διάταξη στον $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$; Δώστε τον ορισμό μιας διάταξης απαλοιφής. Δείξτε ότι μια διάταξη απαλοιφής είναι μονωνυμική.

4. (1 μονάδα) Έστω G_1, G_2 δύο βάσεις Gröbner για το ιδεώδες $I \subset K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ως προς την ίδια μονωνυμική διάταξη. Έστω $f \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ και $f \xrightarrow{G_1} r_1$, $f \xrightarrow{G_2} r_2$, όπου τα r_1, r_2 είναι ανάγωγα μόδιο G_1, G_2 αντίστοιχα. Δείξτε ότι $r_1 = r_2$.

5. (1,5 μονάδες) Βρείτε μιά ανάγωγη βάση Gröbner για το ιδεώδες

$$I = \langle x^n y^{2n} z^{3n} - z^2 \mid n \in \mathbb{N} \rangle$$

του δακτυλίου $\mathbb{R}[x, y, z]$, ως προς κάποια μονωνυμική διάταξη. Είναι η βάση που βρήκατε ανάγωγη ως προς οποιαδήποτε άλλη μονωνυμική διάταξη;

6. (1,5 μονάδες) Δίνεται ο δακτύλιος $\mathbb{C}[x, y, z]$ εφοδιασμένος με την αντίστροφη βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη με $z > y > x$. Βρείτε μιά ανάγωγη βάση Gröbner για το ιδεώδες

$$J = \langle \underline{x^2y} - z^2, \underline{xz^2} - y \rangle.$$

Ανήκει το πολυώνυμο $x^3z^2 + x^3y^2 - xyz - x^2y^2 - y^3 + xz + 2z$ στο ιδεώδες J ;

7. (1,5 μονάδες) Έστω G μια ελαχιστική βάση Gröbner του ιδεώδους

$$I = \langle x_1^{2017} - 2017x_7, x_2^{2016} - 2016x_7, x_3^{2015} - 2015x_7, x_4^{2014} - 2014x_7, x_5^{2013} - 2013x_7, \\ x_6^{2012} - 2012x_7, x_7 \rangle$$

του δακτυλίου $K[x_1, x_2, \dots, x_7]$ που είναι εφοδιασμένος με κάποια μονωνυμική διάταξη. Βρείτε πόσα στοιχεία έχει η G και αποδείξτε ότι οποιαδήποτε G περιέχει ένα συγκεκριμένο μονώνυμο. Ποιό είναι αυτό; Βρείτε την ανάγωγη βάση Gröbner του ιδεώδους I . Είναι η ίδια για οποιαδήποτε μονωνυμική διάταξη;

Καλή επιτυχία